

Adı Soyadı:
Numarası:
İmza:

1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

20.06.2022

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ MATEMATİK
BÖLÜMÜ

2021-2022 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 212 ANALİZ IV FİNAL SINAVI SORULARI

1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y - xy^3}{x^2 + y^2} \cos\left(\pi \frac{x+y}{x-y}\right), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) $f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$ kısmi türevlerini bulunuz.

b) f fonksiyonunun C^2 sınıfından olup olmadığını belirleyiniz.

2) $z = f(x^2 + y)$ ise $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ olduğunu gösteriniz.

3) $f(x, y, z) = x$ nin $g_1(x, y, z) = z - 1 = 0$ düzlemi ile $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ küre yüzeyinin arakesiti olan çember üzerinde ekstremumlarını araştırınız.

4)

$$xy + x^2u = vy^2$$

$$3x - 4y = x^2v$$

olduğuna göre u_x, v_x türevlerini hesaplayınız.

5)

$$u = f_1(x, y) = 4x + 2y$$

$$v = f_2(x, y) = -3x + y$$

olarak tanımlanan $f = (f_1, f_2)$ fonksiyonunun tersini bulunuz. $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız.

6) Çok değişkenli fonksiyonlar için kısmi türevlenebilme, yönlü türev ve türev tanımlarını yapınız, aralarındaki ilişkiyi açıklayınız. İlgili teoremi ifade ve ispat ediniz.

7) $f(x, y) = \cos(y^3)$ fonksiyonunun $y = 2\sqrt{x}$, $y = 8$ ve $x = 0$ eğrileri ile sınırlanan bölgedeki integralini hesaplayınız.

8) $f(x, y) = y \cdot \arctan x$ fonksiyonuna $(0,1)$ noktası civarında ikinci dereceden türevleri içeren terimlere kadar Taylor formülünü uygulayınız.

Not: Sadece 6 soru cevaplayınız. Sorular eşit puanlıdır. Süre 100 dakikadır. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

ANALİZ IV FINAL ÇÖZÜMLERİ

$$1.) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y - xy^3}{x^2+y^2} \cos\left(\pi \cdot \frac{x+y}{x-y}\right), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Fonksiyonu veriliyor.

a) $f_{xy}(0,0)$ ve $f_{yx}(0,0)$ kısmi türevlerini bulunuz.

b) f fonksiyonunun C^2 -sınıfından olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm: a)

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k-0}{k} = 1$$

$$f_x(0,k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2k - hk^3}{h^2+k^2} \cos\left(\pi \cdot \frac{h+k}{h-k}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hk(h-k^2) \cos\left(\pi \cdot \frac{h+k}{h-k}\right)}{(h^2+k^2)h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot (h-k^2) \cos\left(\pi \cdot \frac{h+k}{h-k}\right)}{h^2+k^2} = k$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1-0}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \quad \boxed{\text{YOK}}$$

$$f_y(h,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2k - hk^3}{h^2+k^2} \cos\left(\pi \cdot \frac{h+k}{h-k}\right) - 0}{k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{hk(h-k^2) \cos\left(\pi \cdot \frac{h+k}{h-k}\right)}{(h^2+k^2) \cdot k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h(h-k^2) \cos\left(\pi \cdot \frac{h+k}{h-k}\right)}{h^2+k^2} = -1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

b) f , C^2 -sınıfından değildir.

2.) $z = f(x^2 + y)$ ise $z_{xx} - 2xz_{yx} - 2z_y = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $u = x^2 + y$, $z = f(u)$

$$z_x = f_u \cdot u_x = f_u \cdot 2x = 2x \cdot f_u$$

$$z_{xx} = 2 \cdot f_u + 2x \cdot f_{uu} \cdot u_x = 2f_u + 4x^2 f_{uu}$$

$$z_y = f_u \cdot u_y = f_u \cdot 1 = f_u$$

$$z_{yx} = f_{uu} \cdot u_x = f_{uu} \cdot 2x = 2x f_{uu}$$

$$\begin{aligned} z_{xx} - 2xz_{yx} - 2z_y &= 2f_u + 4x^2 f_{uu} - 2x(2x f_{uu}) - 2f_u \\ &= 2f_u + 4x^2 f_{uu} - 4x^2 f_{uu} - 2f_u \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$\textcircled{5} \quad J = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

olduğundan f 'nin yerel olarak tersi vardır.

$f^{-1} = g = (g_1, g_2)$, yani $x = g_1(u, v)$, $y = g_2(u, v)$ olsun. 0 zaman

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{10} \cdot 1 = \frac{1}{10}$$

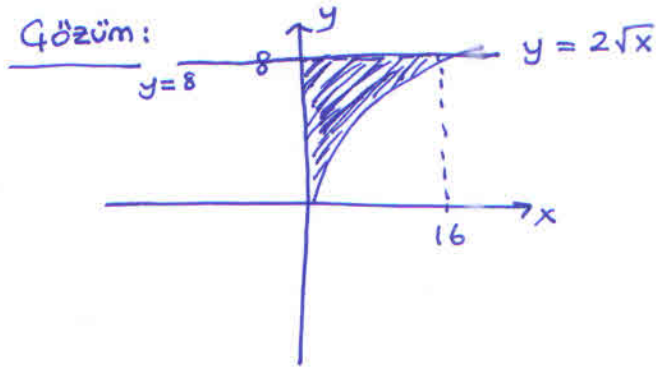
$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{3}{10}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{10} \cdot 4 = \frac{2}{5} \text{ dir.}$$

7) $f(x,y) = \cos(y^3)$ fonksiyonunun $y = 2\sqrt{x}$, $y = 8$ ve $x = 0$ eğrileri ile sınırlanan bölgedeki integralini hesaplayınız.

Çözüm:



$$2\sqrt{x} = 8$$

$$\sqrt{x} = 4$$

$$x = 16$$

$$\int_0^{16} \int_{2\sqrt{x}}^8 \cos(y^3) dy dx$$

integrali zor.

$$\int_0^8 \int_{\frac{y^2}{4}}^8 \cos(y^3) dx dy$$

$$= \int_0^8 x \cdot \cos(y^3) \Big|_{\frac{y^2}{4}}^8 dy$$

$$= \int_0^8 \frac{y^2}{4} \cos(y^3) dy$$

$$\begin{aligned} y^3 &= u \\ 3y^2 dy &= du \end{aligned}$$

$$\int_0^{8^3} \frac{\cos u}{4} \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\sin u}{4} \Big|_0^{8^3}$$

$$= \frac{1}{12} \sin(8^3)$$

3) $L(x,y,z, \lambda_1, \lambda_2) = x + \lambda_1(z-1) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$ denirse,

$$L_x = 0, L_y = 0, L_z = 0, L_{\lambda_1} = 0, L_{\lambda_2} = 0$$

denklemler sisteminden (x_0, y_0, z_0) için

$(\sqrt{3}, 0, 1), (-\sqrt{3}, 0, 1)$ elde edilir.

$\sqrt{3}$ maksimum, $-\sqrt{3}$ minimum noktadır.

6) Ders notlarında var.

8-) $f(x,y) = y \cdot \arctan x$ fonksiyonuna $(0,1)$ noktası civarında ikinci dereceden türevleri içeren terimlere kadar Taylor formülünü uygulayınız.

Gözüm:

$$f(x,y) = y \arctan x \quad f(0,1) = 0$$

$$f_x(x,y) = \frac{y}{1+x^2} \quad f_x(0,1) = 1$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{-2xy}{(1+x^2)^2} \quad f_{xx}(0,1) = 0$$

$$f_y(x,y) = \arctan x \quad f_y(0,1) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = 0 \quad f_{yy}(0,1) = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{1+x^2} \quad f_{xy}(0,1) = 1$$

$$f(x,y) = f(0,1) + (x-0) f_x(0,1) + (y-1) f_y(0,1) + \frac{1}{2!} \left((x-0)^2 f_{xx}(0,1) + 2(x-0)(y-1) f_{xy}(0,1) + (y-1)^2 f_{yy}(0,1) \right) + R_3$$

$$= 0 + x \cdot 1 + (y-1) \cdot 0 + \frac{1}{2!} \left(x^2 \cdot 0 + 2x(y-1) \cdot 1 + (y-1)^2 \cdot 0 \right) + R_3$$

$$= x + \frac{1}{2} \left(2x(y-1) \right) + R_3 = xy + R_3$$

④ $u = f_1(x,y) \quad v = f_2(x,y), \quad F(x,y,u,v) = xy + x^2u - vy^2$
 $G(x,y,u,v) = 3x - 4yu - x^2v$ olsun.

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x^2 & -y^2 \\ -4y & -x^2 \end{vmatrix} = -x^4 - 4y^3 \neq 0 \text{ isin}$$

$$u_x = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} = \frac{1}{x^4 + 4y^3} \begin{vmatrix} y + 2xu & -y^2 \\ 3 - 2xv & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^4 + 4y^3} (-x^2y - 2x^3u + 3y^2 - 2xy^2v)$$

$$v_x = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} = \frac{1}{x^4 + 4y^3} \begin{vmatrix} x^2 & y + 2xu \\ -4y & 3 - 2xv \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^4 + 4y^3} (3x^2 - 2x^3v + 4y^2 + 8xyu)$$